

سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال	رشته‌ی: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۹ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
سال سوم آموزش متوسطه	تاریخ امتحان ۱۳۹۱ / ۵ / ۲۵		
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در مرداد ماه سال ۱۳۹۱	مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir		

ردیف	سؤالات	نمره
۱	با استدلال استقرای ریاضی، برای هر عدد طبیعی n ، ثابت کنید: $1 \times 2 + 2 \times 5 + \dots + n(3n-1) = n^2(n+1)$	۱/۵
۲	با استدلال استنتاجی ثابت کنید که اگر x یک عدد صحیح و مضرب ۳ باشد، آنگاه $x(x+3)$ مضرب ۱۸ است.	۱
۳	می دانیم که $\sqrt{2}$ گنگ است، با استفاده از برهان خلف ثابت کنید $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ نیز گنگ می باشد.	۱
۴	اگر a, b اعداد حقیقی باشند بطوریکه $(ab < 0)$ ، ثابت کنید: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq -2$	۱
۵	مدرسه ای ۶۰۱ نفر دانش آموز دارد، حداقل چند نفر از آنها ماه تولدشان یکسان است و چرا؟	۱
۶	اگر $A = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}, n < 4\}$ و $B = \{2k+1 \mid k \in \mathbb{Z}, k \leq 1\}$ دو مجموعه باشند: الف) A, B را با نوشتن عضوهای مشخص کنید و سپس اعضای $A \times B$ را بنویسید. ب) اگر R یک رابطه از A در B به صورت زیر باشد: $R = \{(x, y) \in A \times B \mid x + y < 6\}$ عضوهای رابطه ی R را مشخص کنید.	۱/۷۵
۷	با استفاده از قوانین جبر مجموعه ها، ثابت کنید: $(A \cup B) - (B \cup C) = (A - B) - C$	۱
۸	اگر $A_n = \{x \in \mathbb{Z} \mid -n \leq x \leq n\}$ مطلوبست: $A_7 - (A_1 \cap A_3)$	۱/۲۵
۹	رابطه ی R روی $\mathbb{Z}$ به صورت زیر تعریف شده است: $(x, y) R (z, t) \Leftrightarrow x^2 - z^2 = y - t$ الف) نشان دهید رابطه ی R هم ارزی است. ب) کلاس هم ارزی $[(-1, 2)]$ را مشخص کنید.	۱/۵
۱۰	یک سکه و یک تاس سالم را با هم پرتاب می کنیم. الف) فضای نمونه ای این آزمایش تصادفی را بنویسید. ب) پیشامد A که در آن سکه پشت و عدد تاس بزرگتر از ۳ باشد را مشخص کنید. پ) پیشامد B که در آن سکه رو و عدد تاس زوج باشد را بنویسید. ت) پیشامد $A' \cap B'$ را بنویسید.	۲
	"ادامه ی سؤالات در صفحه ی دوم"	

باسمه تعالی

سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال	رشته‌ی: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۹ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
سال سوم آموزش متوسطه		تاریخ امتحان ۱۳۹۱ / ۵ / ۲۵	
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در مرداد ماه سال ۱۳۹۱		مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	

ردیف	سؤالات	نمره
۱۱	کیسه ای شامل ۵ مهره ی سفید و ۶ مهره ی سیاه است. از این کیسه ۳ مهره با هم به تصادف بیرون می آوریم، مطلوبست احتمال آنکه حداقل ۲ مهره ی سفید خارج شده باشد.	۱/۵
۱۲	اگر $S = \{a, b, c, d\}$ فضای نمونه ای یک تجربه ی تصادفی باشد و داشته باشیم: $p(a) = 3p(b)$, $p(c) = \frac{1}{4}$, $p(d) = \frac{1}{8}$ مطلوبست محاسبه ی $p(a')$ و $p(b)$.	۱/۲۵
۱۳	آزمونی شامل ۱۵ سؤال دو گزینه ای (درست - غلط) می باشد، دانش آموزی بطور تصادفی به همه سؤالات این آزمون پاسخ می دهد، احتمال آنکه دقیقاً به ۷ سؤال پاسخ درست داده باشد، چقدر است؟	۰/۷۵
۱۴	دو عدد حقیقی به تصادف از بازه ی $[-1, 2]$ انتخاب می کنیم، احتمال آنکه مجموع این دو عدد مثبت باشد را محاسبه کنید.	۱/۵
۱۵	از مجموعه ی اعداد $\{1, 2, \dots, 1000\}$ عددی به تصادف انتخاب می کنیم: الف) احتمال آنکه عدد انتخابی بر ۳ یا ۵ بخش پذیر باشد را بیابید. ب) احتمال آنکه عدد انتخابی بر ۳ بخش پذیر باشد ولی بر ۵ بخش پذیر نباشد را بیابید.	۲
	«موفق باشید»	جمع نمره
		۲۰

راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال	رشته‌ی: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۹ صبح
سال سوم آموزش متوسطه	تاریخ امتحان ۱۳۹۱ / ۵ / ۲۵	
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در مرداد ماه سال ۱۳۹۱	مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	
ردیف	راهنمای تصحیح	نمره

مصححین گرامی لطفاً به توضیحات صفحه چهار راهنمای تصحیح توجه نمایند.

۱	$p(1): 1 \times 2 = 1^2(1+1) \quad (0/25)$ $p(k): 1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + k(3k-1) = k^2(k+1) \quad (0/25) \quad \text{فرض استقراء}$ $p(k+1): 1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + k(3k-1) + (k+1)(3k+2) = (k+1)^2(k+2) \quad (0/25) \quad \text{حکم استقراء}$ $= k^2(k+1) + (k+1)(3k+2) = (k+1)(k^2 + 3k + 2) = (k+1)(k+1)(k+2) = (k+1)^2(k+2) \quad (0/5)$	۱/۵
۲	$x(x+3) = 3q(3q+3) = 9q(q+1) = 9(2t) = 18t \quad (0/25)$ $x(x+3) = 18t \quad (0/5) \quad \text{ضرب دو عدد متوالی همیشه زوج است}$	۱
۳	$1 + \sqrt{2} = a^2 \Rightarrow \sqrt{2} = a^2 - 1 \Rightarrow \sqrt{2} = a^2 - 1 \quad (0/25) \quad \text{گویا گنگ}$ $\sqrt{2} = a^2 - 1 \Rightarrow \sqrt{2} = a^2 - 1 \quad (0/25) \quad \text{فرض خلف}$ $\sqrt{2} = a^2 - 1 \Rightarrow \sqrt{2} = a^2 - 1 \quad (0/25) \quad \text{گنگ: } \sqrt{2}$ تفریق دو عدد گویا همواره گویا است (این تناقض نشان می دهد که خلاف حکم برقرار نمی باشد) (۰/۲۵)	۱
۴	$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq -2 \Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2}{ab} \leq -2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq -2ab \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 0 \quad (0/25)$ عبارت همواره درست است و تمام مراحل بازگشت پذیر می باشند. (۰/۲۵)	۱
۵	$m = 601 = 50 \times 12 + 1 \quad (0/25)$ $n = 12$ طبق اصل لانه کبوتری حداقل در یکی از لانه ها $50+1=51$ کبوتر خواهد بود (۰/۲۵) ، یعنی حداقل ۵۱ دانش آموز ماه تولد یکسان را دارند. (۰/۲۵)	۱
۶	$A = \{2, 4, 8\} \quad (0/25) \quad \text{الف}, \quad B = \{-1, 1, 3\} \quad (0/25)$ $A \times B = \left\{ (2, -1), (2, 1), (2, 3), (4, -1), (4, 1), (4, 3), (8, -1), (8, 1), (8, 3) \right\} \quad (0/75) \quad \text{نمره (هر سه زوج نوشته شده) (۰/۲۵)}$ $R = \left\{ (2, -1), (2, 1), (2, 3), (4, -1), (4, 1), (4, 3) \right\} \quad (0/5) \quad \text{ب}$	۱/۷۵
	« ادامه ی پاسخنامه در صفحه ی دوم »	

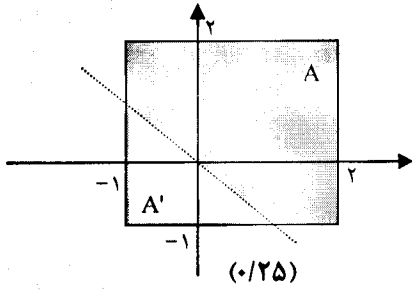
راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال	رشته‌ی: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۹ صبح
سال سوم آموزش متوسطه	تاریخ امتحان ۱۳۹۱ / ۵ / ۲۵	
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در مرداد ماه سال ۱۳۹۱	مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	
ردیف	راهنمای تصحیح	نمره

مصححین گرامی لطفاً به توضیحات صفحه چهار راهنمای تصحیح توجه نمایند.

۱	$(A \cup B) - (B \cup C) = (A \cup B) \cap (B \cup C)' = (A \cup B) \cap (B' \cap C') = [(A \cup B) \cap B'] \cap C' =$ $[(A \cap B') \cup \emptyset] \cap C' = (A \cap B') \cap C' = (A - B) - C$	۷
۱/۲۵	$A_1 = \{-1, 0, 1\} \quad (0/25)$ $A_2 = \{-2, -1, 0, 1, 2\} \quad (0/25)$ $A_3 = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\} \quad (0/25)$ $A_1 \cap A_2 = \{-1, 0, 1\} \quad (0/25)$ $A_2 - (A_1 \cap A_2) = \{-2, 2\} \quad (0/25)$	۸
۱/۵	(الف) $\forall (x, y) \in R^2, (x, y) R (x, y) \Rightarrow x^2 - x^2 = y - y$ رابطه‌ی بازتابی (۰/۲۵) $(x, y) R (z, t) \Rightarrow (z, t) R (x, y)$ $(x, y) R (z, t) \Rightarrow x^2 - z^2 = y - t \Rightarrow z^2 - x^2 = t - y \Rightarrow (z, t) R (x, y)$ رابطه‌ی تقارنی (۰/۲۵) $\left. \begin{matrix} (x, y) R (z, t) \\ (z, t) R (e, f) \end{matrix} \right\} \Rightarrow (x, y) R (e, f)$ $\left. \begin{matrix} x^2 - z^2 = y - t \\ z^2 - e^2 = t - f \end{matrix} \right\} \xrightarrow{+} x^2 - e^2 = y - f \Rightarrow (x, y) R (e, f)$ رابطه‌ی تعدی (۰/۵) هر سه خاصیت را دارد پس هم ارزی است. (ب) $[(-1, 2)] = \{(x, y) (x, y) R (-1, 2)\} \Rightarrow \{(x, y) x^2 - 1 = y - 2\} = \{(x, y) y = x^2 + 1\}$ (۰/۲۵)	۹
۲	(الف) $S = \{(ر, ۱), (ر, ۲), (ر, ۳), (ر, ۴), (ر, ۵), (ر, ۶)\} \cup \{(پ, ۱), (پ, ۲), (پ, ۳), (پ, ۴), (پ, ۵), (پ, ۶)\}$ (۰/۵) (ب) $A = \{(پ, ۴), (پ, ۵), (پ, ۶)\}$ (۰/۵) (پ) $B = \{(ر, ۲), (ر, ۴), (ر, ۶)\}$ (۰/۵) (ت) $A' \cap B' = (A \cup B)' = \{(پ, ۱), (پ, ۲), (پ, ۳), (ر, ۱), (ر, ۳), (ر, ۵)\}$ (۰/۵)	۱۰
۱/۵	$n(S) = \binom{11}{3} = 165 \quad (0/25) \quad n(A) = \binom{5}{2} \binom{6}{1} + \binom{5}{3} = 70 \quad (0/25)$ $p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \quad (0/25) \Rightarrow p(A) = \frac{70}{165} = \frac{14}{33} \quad (0/25)$	۱۱
	«ادامه پاسخنامه در صفحه ی سوم»	

راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال	رشته‌ی: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۹ صبح
سال سوم آموزش متوسطه	تاریخ امتحان ۱۳۹۱ / ۵ / ۲۵	
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در مرداد ماه سال ۱۳۹۱	مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	
ردیف	راهنمای تصحیح	نمره

مصححین گرامی لطفاً به توضیحات صفحه چهار راهنمای تصحیح توجه نمایند.

۱۲	$p(a) + p(b) + p(c) + p(d) = 1 \quad (./25)$ $3p(b) + p(b) + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = 1 \Rightarrow p(b) = \frac{3}{32} \quad (./25)$ $p(a) = \frac{9}{32} \Rightarrow p(a') = 1 - \frac{9}{32} = \frac{23}{32} \quad (./25)$	۱۲
۱۳	$p(A) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n} = \frac{\binom{15}{7}}{2^{15}} \quad (./25)$	۱۳
۱۴	$S = \{(x, y) \in R^2 \mid -1 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 2\}$ $A = \{(x, y) \in S \mid x + y > 0\} \quad (./25)$ $a_S = 9 \quad (./25)$ $a_{A'} = \frac{2 \times 2}{2} = 2 \quad (./25) \Rightarrow a_A = 9 - 2 = 7 \quad (./25)$ $p(A) = \frac{a_A}{a_S} = \frac{7}{9} \quad (./25)$ 	۱۴
۱۵	A: عدد مضرب ۳ باشد $n(S) = 1000 \quad (./25)$ $n(A) = \left[\frac{1000}{3} \right] = 333 \quad (./25)$ B: عدد مضرب ۵ باشد $n(B) = \left[\frac{1000}{5} \right] = 200 \quad (./25)$ $n(A \cap B) = \left[\frac{1000}{15} \right] = 66 \quad (./25)$ (الف) $P(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \quad (./25)$ $p(A \cup B) = \frac{333}{1000} + \frac{200}{1000} - \frac{66}{1000} = \frac{467}{1000} \quad (./25)$ (ب) $p(A - B) = p(A) - p(A \cap B) \quad (./25)$ $p(A - B) = \frac{333}{1000} - \frac{66}{1000} = \frac{267}{1000} \quad (./25)$	۱۵
۲۰	جمع نمره www.riazisara.ir دانلود نمونه سؤالات از سایت ریاضی سرا	

با عرض خسته نباشید حضور همکاران گرامی، لطفاً برای راه حل های صحیح دیگر هم به تناسب نمره منظور فرمائید.

باسمه تعالی

راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال	رشته‌ی: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۹ صبح
سال سوم آموزش متوسطه	تاریخ امتحان ۱۳۹۱ / ۵ / ۲۵	
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در مرداد ماه سال ۱۳۹۱	مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	
ردیف	صفحه چهار راهنمای تصحیح	
	نمره	

با توجه به مشکل جابجایی پرانتزها در تایپ سوال ۱۲، چنانچه دانش آموزی مسأله را تشخیص داده و حل نموده

است، بارم طبق راهنمای تصحیح منظور گردد. در غیر اینصورت سوال ۱۲ حذف و بارم آن به شرح ذیل توزیع گردد:

۱) در سوال ۱۱ بارم ۰/۷۵ به ۱ نمره تغییر یابد (بارم سوال ۱/۷۵ نمره)

۲) در سوال ۱۳ بارم ۰/۷۵ به ۱ نمره تغییر یابد (بارم سوال ۱ نمره)

۳) در سوال ۱۴، ۰/۲۵ به شکل و ۰/۲۵ به قسمت S اضافه شود (بارم سوال ۲ نمره)

۴) در سوال ۱۵، ۰/۲۵ به فرمول قسمت ب اضافه شود (بارم سوال ۲/۲۵ نمره)